

© International Baccalaureate Organization 2023

All rights reserved. No part of this product may be reproduced in any form or by any electronic or mechanical means, including information storage and retrieval systems, without the prior written permission from the IB. Additionally, the license tied with this product prohibits use of any selected files or extracts from this product. Use by third parties, including but not limited to publishers, private teachers, tutoring or study services, preparatory schools, vendors operating curriculum mapping services or teacher resource digital platforms and app developers, whether fee-covered or not, is prohibited and is a criminal offense.

More information on how to request written permission in the form of a license can be obtained from <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organisation du Baccalauréat International 2023

Tous droits réservés. Aucune partie de ce produit ne peut être reproduite sous quelque forme ni par quelque moyen que ce soit, électronique ou mécanique, y compris des systèmes de stockage et de récupération d'informations, sans l'autorisation écrite préalable de l'IB. De plus, la licence associée à ce produit interdit toute utilisation de tout fichier ou extrait sélectionné dans ce produit. L'utilisation par des tiers, y compris, sans toutefois s'y limiter, des éditeurs, des professeurs particuliers, des services de tutorat ou d'aide aux études, des établissements de préparation à l'enseignement supérieur, des fournisseurs de services de planification des programmes d'études, des gestionnaires de plateformes pédagogiques en ligne, et des développeurs d'applications, moyennant paiement ou non, est interdite et constitue une infraction pénale.

Pour plus d'informations sur la procédure à suivre pour obtenir une autorisation écrite sous la forme d'une licence, rendez-vous à l'adresse <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

© Organización del Bachillerato Internacional, 2023

Todos los derechos reservados. No se podrá reproducir ninguna parte de este producto de ninguna forma ni por ningún medio electrónico o mecánico, incluidos los sistemas de almacenamiento y recuperación de información, sin la previa autorización por escrito del IB. Además, la licencia vinculada a este producto prohíbe el uso de todo archivo o fragmento seleccionado de este producto. El uso por parte de terceros —lo que incluye, a título enunciativo, editoriales, profesores particulares, servicios de apoyo académico o ayuda para el estudio, colegios preparatorios, desarrolladores de aplicaciones y entidades que presten servicios de planificación curricular u ofrezcan recursos para docentes mediante plataformas digitales—, ya sea incluido en tasas o no, está prohibido y constituye un delito.

En este enlace encontrará más información sobre cómo solicitar una autorización por escrito en forma de licencia: <https://ibo.org/become-an-ib-school/ib-publishing/licensing/applying-for-a-license/>.

Mathematik: Analyse und Ansätze

Grundstufe

1. Klausur

30. Oktober 2023

Zone A Nachmittag | Zone B Nachmittag | Zone C Nachmittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

1 Stunde 30 Minuten

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur dürfen Sie keinen Taschenrechner nutzen.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Answerheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Answerhefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[80 Punkte]**.



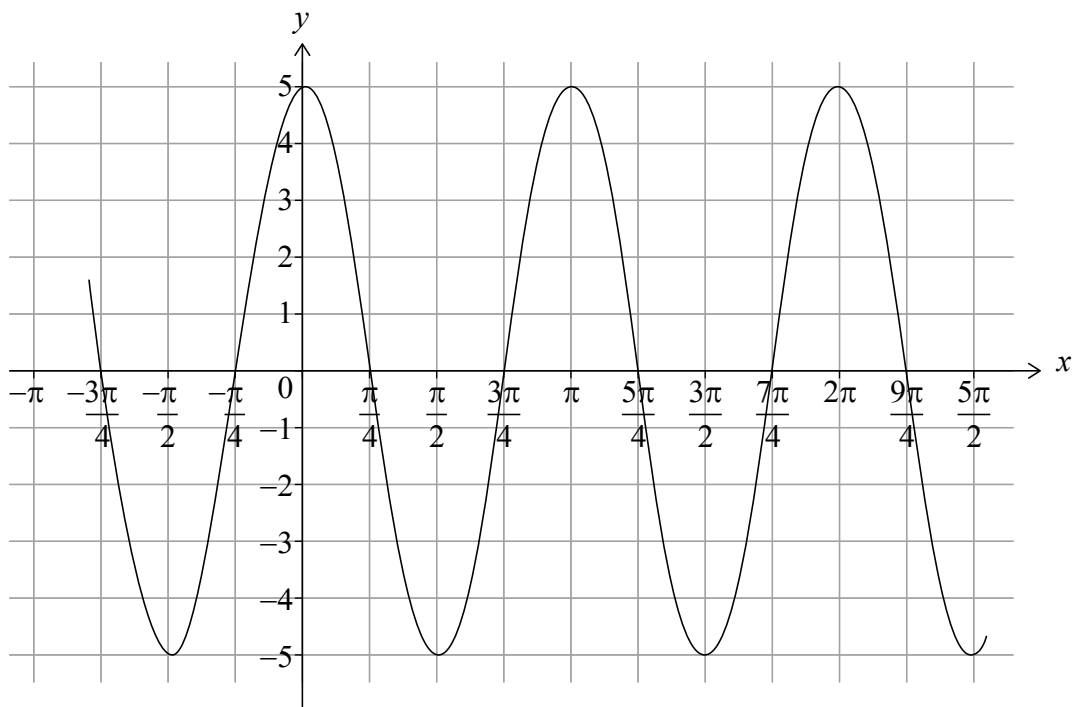
Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = a \cos(bx)$, mit $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Das folgende Diagramm zeigt einen Teil des Graphen von f .



- (a) Notieren Sie den Wert von a . [1]
- (b) (i) Notieren Sie die Periode von f . [3]
- (ii) Finden Sie damit den Wert von b . [3]
- (c) Finden Sie den Wert von $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



(Fortsetzung Frage 1)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



16EP03

Bitte umblättern

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.
Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



2. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktionen $f(x) = x - 3$ und $g(x) = x^2 + k^2$, mit einer reellen Konstanten k .

(a) Notieren Sie einen Ausdruck für $(g \circ f)(x)$. [2]

(b) Es sei $(g \circ f)(2) = 10$. Finden Sie die möglichen Werte von k . [3]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

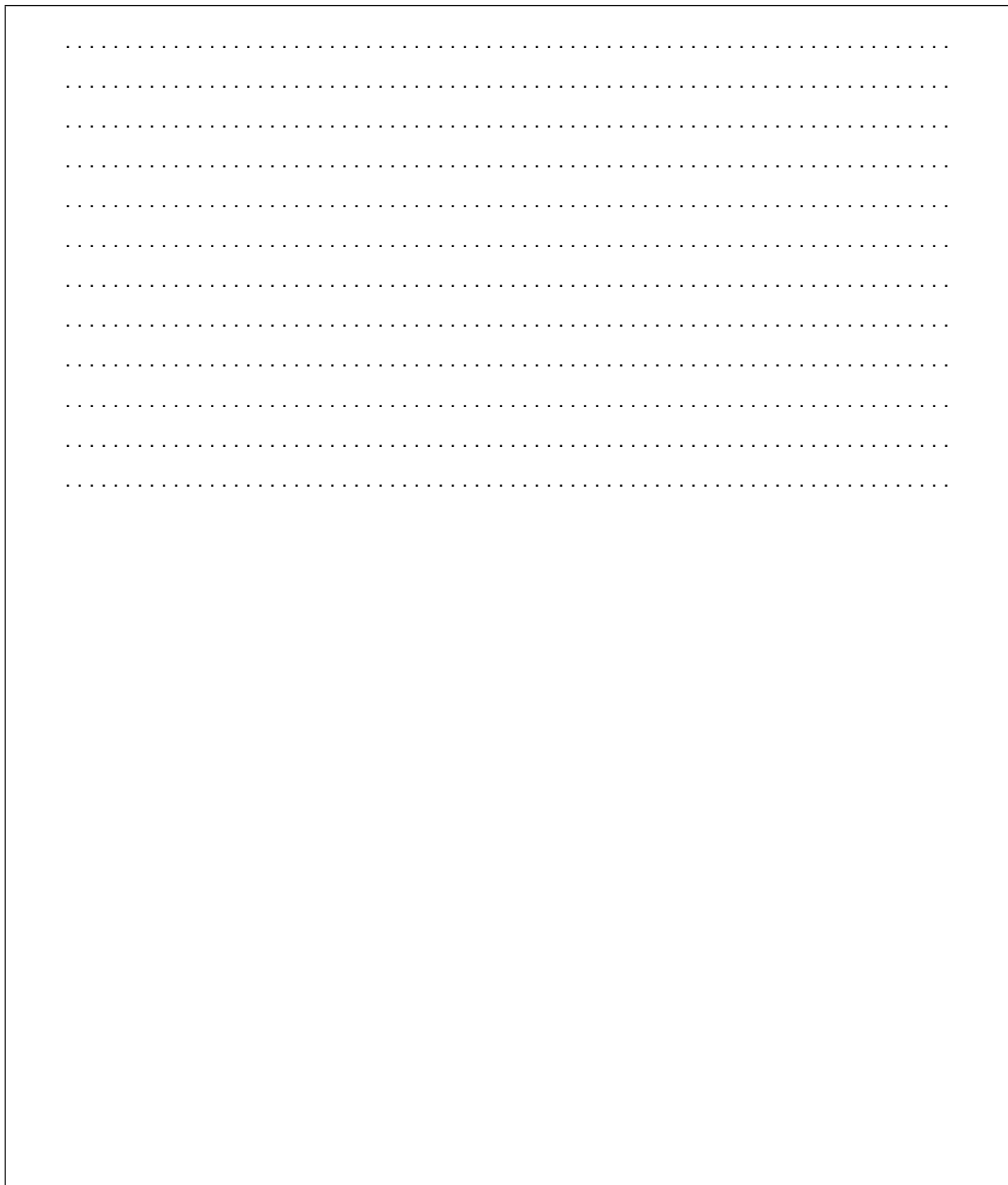


3. [Maximale Punktzahl: 4]

Für die Ereignisse A und B gelten $P(A) = 0,65$, $P(B) = 0,75$ und $P(A \cap B) = 0,6$.

(a) Finden Sie $P(A \cup B)$. [2]

(b) Finden Sie damit oder auf andere Weise $P(A' \cap B')$. [2]



4. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Summe der ersten n Terme einer arithmetischen Folge ist gegeben durch $S_n = pn^2 - qn$, wobei p und q positive Konstanten sind.

Es gilt: $S_4 = 40$ und $S_5 = 65$.

(a) Finden Sie die Werte von p und q . [5]

(b) Finden Sie den Wert von u_5 . [2]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

7. [Maximale Punktzahl: 17]

Ein Ballettensemble führt jedes Jahr den *Nussknacker* auf. Im vergangenen Jahr hat das Ensemble insgesamt 60 Vorstellungen in seinem Theater aufgeführt, das Plätze für maximal 800 Zuschauer bietet. Die Anzahl n der für jede Aufführung verkauften Eintrittskarten ist in der folgenden Häufigkeitstabelle dargestellt.

Anzahl n der verkauften Eintrittskarten	Anzahl der Aufführungen
$0 < n \leq 200$	3
$200 < n \leq 400$	p
$400 < n \leq 600$	18
$600 < n \leq 800$	30

(a) (i) Finden Sie den Wert von p .

(ii) Notieren Sie die Modalklasse.

[2]

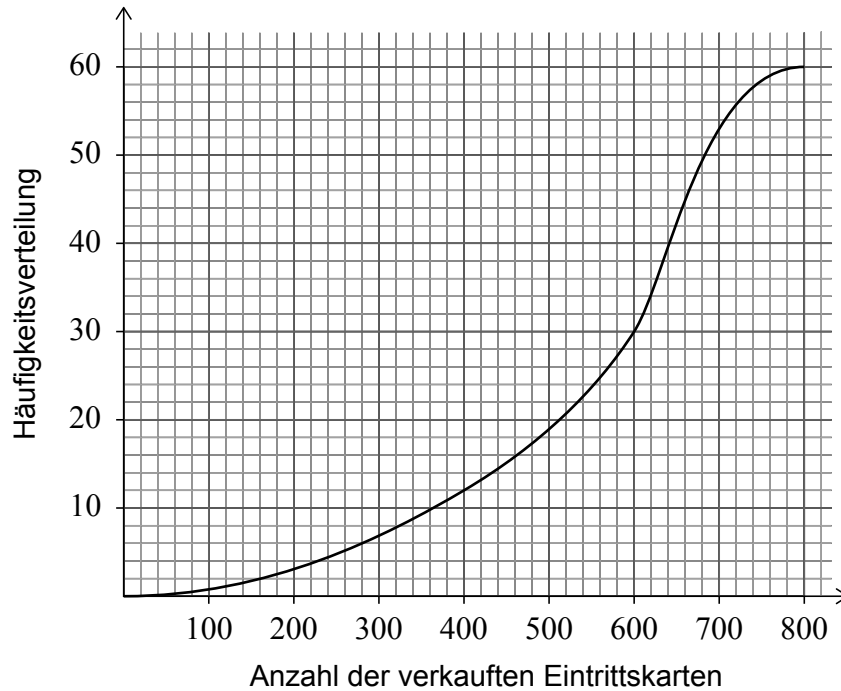
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 7)

Die folgende Häufigkeitsverteilungskurve zeigt diese Daten ebenfalls.



(b) Schätzen Sie mit Hilfe der Häufigkeitsverteilungskurve die folgenden Werte:

- (i) den Medianwert für die Anzahl der verkauften Eintrittskarten;
- (ii) die Anzahl der Aufführungen, bei denen mindestens 80% der Eintrittskarten verkauft wurden.

[4]

(Auf die vorliegende Frage wird auf Seite 13 weiter eingegangen)



16EP11

Bitte umblättern

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben
werden, werden nicht bewertet.



16EP12

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 7)

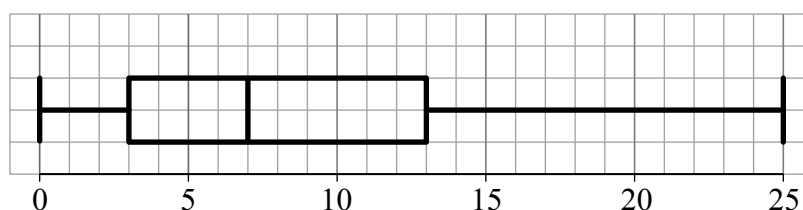
Nach einer Aufführung beschließt das Ensemble, durch eine Umfrage das Feedback des Publikums einzuholen.

- (c) (i) Geben Sie einen Nachteil an, wenn das Ensemble nur die ersten 5% des Publikums beim Verlassen des Theaters befragt.
- (ii) Beschreiben Sie kurz, wie das Ensemble mit Hilfe der systematischen Stichprobenmethode das Feedback von 5% des Publikums einholen könnte.
- (iii) Geben Sie die zu nutzende Stichprobenmethode an, wenn die Umfrage repräsentativ für die Anzahl der Kinder und die Anzahl der Erwachsenen im Publikum sein soll.

[4]

Letztes Jahr wurden 36 000 Eintrittskarten für den *Nussknacker* verkauft.

- (d) Das folgende Box- und Whisker-Diagramm zeigt den Betrag, den die Zuschauer beim Besuch der Vorstellung im Souvenirladen ausgaben.



Ausgegebener Betrag (\$)

- (i) Schätzen Sie die Anzahl der Personen, die zwischen 3\$ and 25\$ ausgegeben haben.
 - (ii) Die Hälfte der Zuschauer gab weniger als a \$ aus. Schätzen Sie den Wert von a . [3]
- (e) In diesem Jahr wird das Ensemble wieder 60 Vorstellungen geben und hofft, für jede Vorstellung 17 zusätzliche Eintrittskarten zu verkaufen.
- (i) Berechnen Sie die durchschnittliche Anzahl der Eintrittskarten, die das Ensemble in diesem Jahr für jede Vorstellung verkaufen möchte.
 - (ii) Geben Sie an, welche Auswirkung dieser Anstieg der Kartenverkäufe gegebenenfalls auf die Varianz der Anzahl der verkauften Eintrittskarten für jede Vorstellung hätte.

[4]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

8. [Maximale Punktzahl: 15]

Die Funktionen f und g sind folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \ln(2x - 9), \text{ mit } x > \frac{9}{2}$$

$$g(x) = 2 \ln x - \ln d, \text{ mit } x > 0, d \in \mathbb{R}^+.$$

(a) Geben Sie die Gleichung der vertikalen Asymptote an den Graphen von $y = g(x)$ an. [1]

Die Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$ schneiden sich in zwei verschiedenen Punkten.

(b) (i) Zeigen Sie, dass in den Schnittpunkten gilt: $x^2 - 2dx + 9d = 0$.

(ii) Zeigen Sie damit, dass $d^2 - 9d > 0$.

(iii) Finden Sie den Wertebereich der möglichen Werte von d . [9]

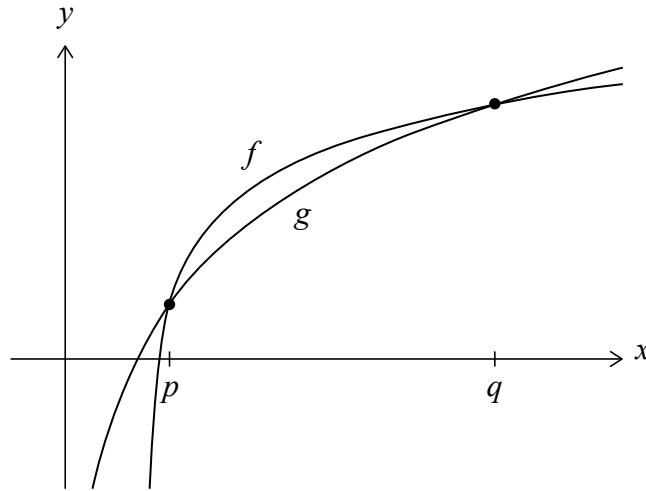
(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 8)

Das folgende Diagramm zeigt Teile der Graphen von $y = f(x)$ und $y = g(x)$.



Die Graphen schneiden sich an $x = p$ und $x = q$, mit $p < q$.

- (c) Finden Sie für $d = 10$ den Wert von $q - p$. Geben Sie Ihre Antwort in der Form $a\sqrt{b}$, mit $a, b \in \mathbb{Z}^+$.

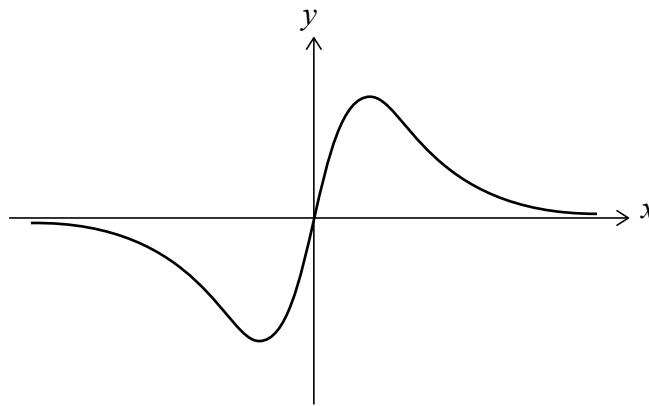
[5]



Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

9. [Maximale Punktzahl: 13]

Betrachten Sie die Funktion f , die durch $f(x) = \frac{8x}{(x^2+1)^3}$ mit $x \in \mathbb{R}$ definiert ist. Der Graph von f ist im folgenden Diagramm dargestellt.



- (a) Zeigen Sie, dass $f'(x) = \frac{8(1-5x^2)}{(x^2+1)^4}$. [4]
- (b) Finden Sie $\int f(x)dx$. [4]

Betrachten Sie eine Funktion $g(x)$, die für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist. Für die Ableitung von g gilt $g'(x) = f'(x)$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

R sei die durch den Graphen von f , den Graphen von g , die Gerade $x = 0$ und die Gerade $x = 3$ begrenzte Fläche. Der Flächeninhalt von R beträgt $\frac{27}{2}$.

- (c) Finden Sie die beiden möglichen Ausdrücke für $g(x)$. [5]

